UNIUNEA EUROPEANĂ

Instrumente Structurale
2014-2020

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Capital Uman 2014-2020
Axa prioritară 6: *Educație și competențe*
Prioritatea de investiții 10.i: *Reducerea și prevenirea abandonului școlar timpuriu și promovarea accesului egal la învățământul preșcolar, primar și secundar de calitate, inclusiv la parcursuri de învățare formale, nonformale și informale pentru reintegrarea în educație și formare*
Obiectivul specific 6.4: *Creșterea numărului de tineri care au abandonat școala și de adulți care nu și-au finalizat educația obligatorie care se reîntorc în sistemul de educație și formare, inclusiv prin programe de tip a doua șansă și programe de formare profesională*
Obiectivul specific 6.6: *Îmbunătățirea competențelor personalului didactic din învățământul preuniversitar în vederea promovării unor servicii educaționale de calitate orientate pe nevoile elevilor și a unei școli inclusive*
Titlu proiect: "*Acces la programe de educație și formare profesională pentru tinerii și adulții din județul Dolj care au părăsit timpuriu școala (II)*"
Cod SMIS 2014+: *135712*

MATERIALE DE PREDARE
DISCIPLINA
matematica

Modulul 4 "Provocări matematice"

Unitatea de învățare III: NUMĂRARE ȘI COMBINATORICĂ

Program „A doua șansă" pentru învățământ secundar inferior

Versiunea finală

A.3.1 Organizarea, monitorizarea și evaluarea programului „A doua șansă" și a stagiilor de pregătire practică de 720 de ore

Nume prenume: Ungureanu Cristina
Expert curriculum matematica

august **2023**

UNITATEA III: NUMARARE SI COMBINATORICA

- Scheme logice;

-Descompuneri și recompuneri;

-Proporționalitate;

-Ecuații;

-Probleme cu … probleme;

-Funcții;

În fiecare zi suntem obligați să luăm decizii. Mâncăm aia sau cealaltă? Îl sunam pe X sau ne întâlnim cu Y? Mergem la job sau ne căutăm un alt job mai bun? Mergem cu mașina sau mergem cu tramvaiul/metroul/autobuzul/pe jos?

Nu putem ignora faptul ca importanta deciziilor e diferita. Daca mănânci la micul dejun ouă cu șuncă în loc de lapte cu cereale sau alegi o anumită soluție la o problemă.
Ne întrebăm deseori care sunt cele mai eficiente strategii pentru a rezolva problemele de zi cu zi sau pentru a lua decizii (mai importante sau mai puțin importante).

Prin definiție, **problemele sunt situații sau probleme care sunt în așteptarea unei soluții**. Prin urmare, începem să știm că fiecare problemă are o soluție.

Primul pas este definirea problemei. Chiar daca sună ciudat, de multe ori încercăm să rezolvăm ceva înainte de a știi ce anume vrem să rezolvăm. O metoda bună pentru clarificarea unei probleme este aceea de a o scrie. Astfel vom vedea mai bine ce avem de rezolvat sau de hotărât.

„A găsi soluţia unei probleme este o performanţă apecifică inteligenţei, iar inteligenţa este apanajul specific speciei umane” completează J. James.

Profesorul care vrea să imprime elevilor săi o atitudine corectă în abordarea problemelor trebuie să-şi fi însuşit el însuşi o astfel de atitudine.

Ce spune problema?

Ce este dat şi ce trebuie aflat?

Ai determinat datele cunoscute?

Sunt suficiente, sunt redundante?

Se poate găsi vreo legătură între problema noastră şi o problemă care se rezolvă mai simplu sau care se rezolvă direct?

Acestea sunt întrebările care trebuie puse mai întâi de profesor, apoi de elev sieşi. Profesorul are în faţă o sarcină dublă cu laturi în parte contradictorii. El trebuie să pună pe elev deopotrivă în situaţiile: - de a învăţa matematică, - de a face matematică.

Rezolvarea oricărei probleme trece prin mai multe etape. În fiecare dintre aceste etape, datele problemei apar în combinaţii noi, reorganizarea lor la diferite nivele ducând către soluţia problemei. Este vorba de un permanent proces de analiză şi sinteză (prin care elevul separă şi reconstituie, desprinde şi construieşte raţionamentul care conduce la soluţia problemei), de o îmbinare aparte a analizei cu sinteza, caracterizată prin aceea că diferitele. elemente luate în consideraţie îşi dezvăluie mereu noi aspecte (analiza) în funcţie de combinaţiile în care sunt plasate. Procesul de rezolvare a unei probleme presupune deducerea şi formularea unor ipoteze şi verificarea lor.

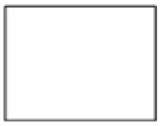
Este cert însă că oricare ar fi problema, raționamentul corect și logica nu prea se pot elimina. Primul pas, așa cum am mai spus, este să avem un plan de rezolvare.
În acest sens ne pot ajuta „schemele logice”.

Elementele unei scheme logice:

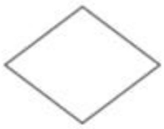
- (START) (STOP);
- intrare / iesire
- atribuire;
- decizie;

- **Început/Sfârșit** Utilizați această formă pentru primul și ultimul pas al procesului.

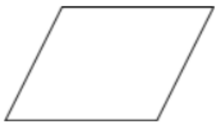
- **Proces** Această formă reprezintă un pas tipic din procesul dvs. Aceasta este forma utilizată cel mai des în aproape orice proces.

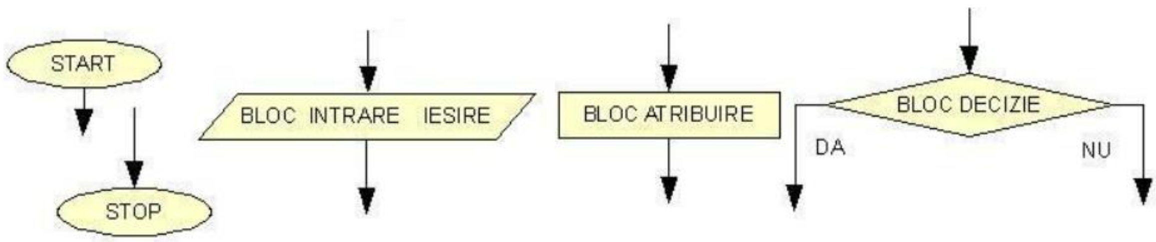


- **Decizie** Această formă arată un punct în care rezultatul unei decizii dictează următorul pas. Pot exista mai multe rezultate, dar deseori sunt doar două: da și nu.



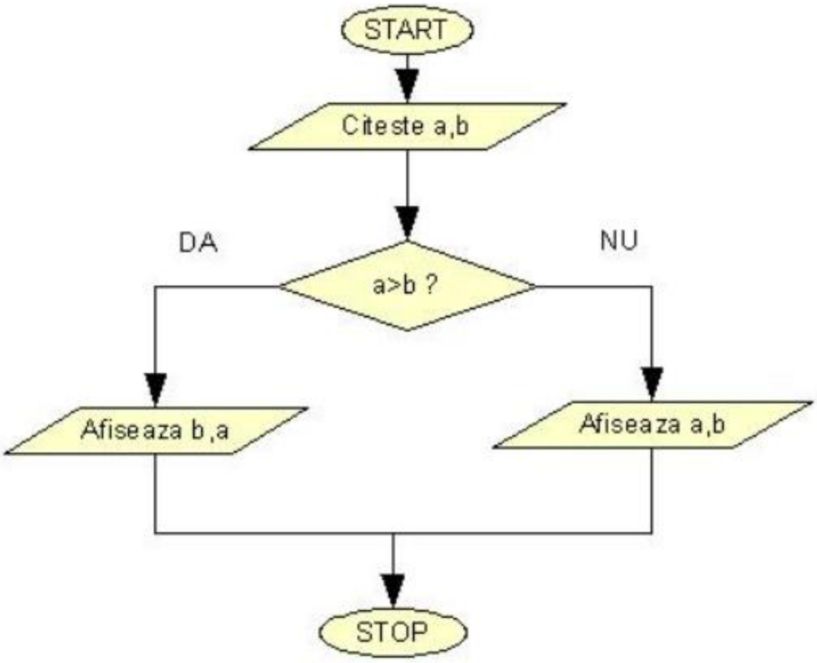
- **Date** Această formă indică faptul că sosesc informații în proces din afară sau că informații pleacă din proces. Această formă se poate utiliza și pentru a reprezenta materiale și se numește uneori formă Input/Output.





Schema logica a programului care așteaptă raza unui cerc și afișează aria acestuia , arată astfel:

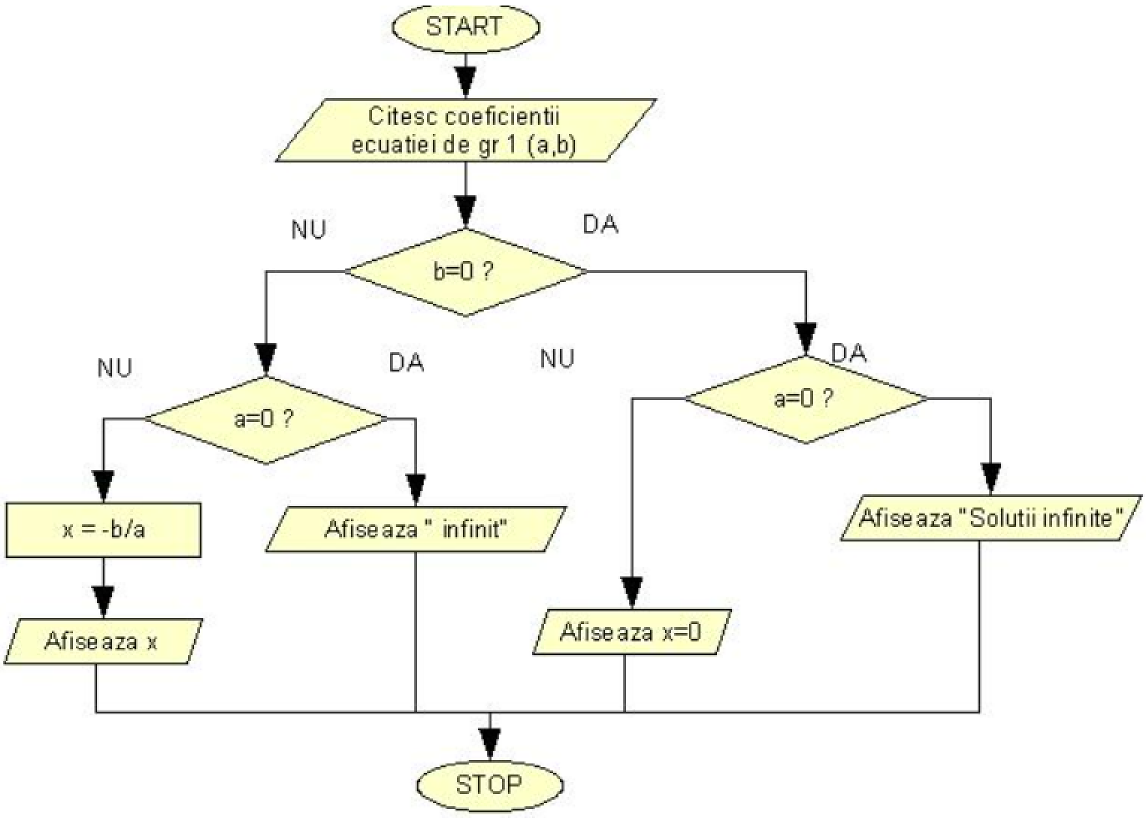
Iată acum schema logică a unui program care așteaptă două numere (a si b) pe care le afișează în ordine crescătoare adică în ordinea a,b dacă   a < b sau b,a dacă b < a



Schema logica a unui program care așteaptă coeficienții ecuației de gradul 1 (a si b) și afișează soluțiile:

UNIUNEA EUROPEANĂ

Instrumente Structurale 2014-2020



A descompune înseamnă a desface, a despărți, a divide, a fracționa, a împărți, a scinda, a separa.

Exercițiile de compunere și descompunere a numerelor naturale, figuri geometrice, corpuri geometrice facilitează înțelegerea a componenței numărului, a figurilor și corpurilor geometrice.

Dintr-un anumit punct de vedere, foarte multe probleme vă cer să descompuneți și apoi să recompuneți lucrurile. Daca nu altceva, datele problemei cu siguranță.

Descompunerea în sumă

Exemplu: 18 = 2 + 7 + 9.

Descompuneți în sumă acest număr și în alte moduri, folosind:

a) doar termeni diferiți;

b) termeni care să se repete;

Câte descompuneri găsiți?

Șirul în care fiecare termen, exceptând primii doi, se obține ca suma celor doi termeni care îl precedă. se numește ***șirul Fibonacci***: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Descompunerea în produs

Exemplu: $18 = 3 \cdot 6$

În acest caz, factorii în care se descompune numărul se numesc și divizori ai lui.

Printre asemenea descompuneri, cea mai importantă este descompunerea în factori primi.

Exemplu: $18 = 2 \cdot 3^2$

Orice număr natural se poate descompune în mod unic în factori primi.

Un număr natural se numește număr prim dacă, în afara lui 1 și el însuși, nu are alți divizori.

Exemple de numere prime: 2, 3, 5, 17, 31, ….

Se poate plăti suma de 180 RON folosind doar bancnote de 5 și 10 lei?

Dacă da, câte bancnote de fiecare fel se vor folosi?

Încercați să analizați ce legătură se poate stabili între textul de mai sus și expresia:

$5x + 10y = 180$.

Expresia de mai sus este o ecuație. Mai precis, o ecuație cu două necunoscute, notate prin x și y.

În matematică, o **ecuație** este o propoziție matematică ce afirmă că două expresii matematice sunt egale doar pentru anumite valori ale variabilelor implicate în acestea (sau chiar pentru nici o valoare).

Valorile variabilelor pentru care egalitatea este adevărată poartă numele de *soluții*. Ecuația de gradul întâi este cea mai simplă de ecuație O astfel de ecuație poate fi scrisă generic: $\boldsymbol{ax + b = 0}$

Soluția ecuației este unică, cu condiția ca **a**, coeficientul necunoscutei, să fie nenul, fiind dată de fracția: $\boldsymbol{x = \frac{-b}{a}}$

Exemple: $\boldsymbol{x + 2 = 12}$

$\boldsymbol{x = 12 - 2}$

$x = 10$

$\boldsymbol{2x - 3 = 13}$

$\boldsymbol{2x = 13 + 3}$

$$2x = 16$$

$$x = 16 \div 2$$

$$x = 8$$

Ecuațiile echivalente sunt ecuațiile care au aceleași soluții

Exemple:

x + 2 = 7

2x + 1 = 11

Rezolvând cele două ecuații obținem pentru ambele soluția x=5

Ecuația algebrică de gradul al doilea are *forma generală* :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Soluțiile unei astfel de ecuații sunt date de formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ecuațiile ajută la rezolvarea problemelor.

Algoritm = o succesiune finită de operații care aplicate datelor de intrare ale unei probleme conduc la soluție

Prin algoritm înţelegem o succesiune finită de operaţii cunoscute care se execută într-o succesiune logică bine stabilită astfel încât plecând de la un set de date de intrare, să obţinem într-un interval de timp finit un set de date de ieşire

Exemple;

Algoritmul lui Euclid (este considerat primul algoritm)

• Determinarea celui mai mare divizor comun a două numere

Algoritmul lui Eratostene

• Generarea numerelor prime mai mici decât o valoare dată

Finitudine – proprietatea algoritmilor de a furniza datele de ieşire într-un timp finit (adică după un număr finit de paşi). De exemplu, dacă avem următoarea problemă: Se citeşte un număr n natural. Să se efectueze operaţia de extragere a radicalului şi să se afişeze rezultatul. Această problemă nu este un proces finit, deoarece nu s-a specificat precizia cu care se va furniza rezultatul.

Claritatea - algoritmul trebuie să descrie operaţiile clar şi fără ambiguiăţi.

Generalitatea – proprietatea algoritmilor de a rezolva o întreagă clasă de probleme de acelaşi fel. De exemplu adunarea 2+8 este o problemă care adună numai aceste două numere, însă dacă elaboram o metodă de rezolvare care va aduna a+b, unde a şi b pot avea orice valori întregi, spunem ca am realizat un algoritm general.

Corectitudinea – spunem că un algoritm este corect dacă el furnizează în mod corect datele de ieşire pentru toate situaţiile regăsite în datele de intrare.

De exemplu, trebuie să evaluam expresia E=a/b+c.

O succesiune de paşi pentru evaluarea expresiei este: - se citeşte a, b, c - se calculează a/b, apoi rezultatul se adună cu c. - se atribuie lui E valoarea calculată - se afişează E

Acest algoritm NU furnizează rezultatul corect pentru toate valorile de intrare. În cazul în care b=0, împărţirea nu se poate efectua dar algoritmul nu verifică acest lucru.

Există totuşi algoritmi care sunt corecţi, clari, generali şi furnizează soluţia într-un timp finit însă mai lung sau folosesc mai multă memorie decât alţi algoritmi. Aceasta înseamnă că atunci când elaborăm un algoritm, nu ne oprim la prima soluţie găsită. Vom încerca să găsim algoritmi care să dea soluţia într-un timp cât mai scurt, cu cât mai puţină memorie folosită.

Cu alte cuvinte vom încerca să elaboram algoritmi eficienţi.

Problema:

Datele problemei : a, b - nr.naturale

• Cerința: determina cmmdc (a,b)

• Metoda de rezolvare : împarte a la b și reține restul

• împarte b la rest și reține noul rest • continuă împărțirile până se ajunge la un rest nul

• ultimul rest nenul reprezintă rezultatul

Un algoritm trebuie să funcționeze corect pentru toate instanțele de date de intrare nu

UNIUNEA EUROPEANĂ

Instrumente Structurale 2014-2020

doar pentru cazuri particulare.

Exemplu:

Să considerăm problema ordonării (sortării) crescătoare a unui şir de valori numerice.

De exemplu: (2,1,4,3,5) → (1,2,3,4,5) date intrare rezultat

Metoda:

Generalitate Descriere:

Pas 1: 2 1 4 3 5 - Compară primele două elemente; dacă nu sunt în ordinea dorită se interschimbă

Pas 2: 1 2 4 3 5 - Compară al doilea cu al treilea şi aplică aceeaşi strategie

Pas 3:1 2 4 3 5 - Continuă procesul până la ultimele două elemente din secvență

Pas 4: 1 2 3 4 5

Este acest algoritm suficient de general ?

Asigură ordonarea crescătoare a oricărui şir de valori ?

Răspuns: NU

Contraexemplu: 3 2 1 4 5

2 3 1 4 5

2 1 3 4 5

2 1 3 4 5

In acest caz metoda nu funcționează deci nu poate fi considerată un algoritm general de sortare. Pentru a realiza sortarea completă e necesară reluarea procesului de parcurgere a secvenței: 2 1 3 4 5 → 1 2 3 4 5 → 1 2 3 4 5 → 1 2 3 4 5 → 1 2 3 4 5

Teoria jocurilor *(în eng. game theory)* este o ramură a matematicii aplicate care abordează problema comportamentului optim în jocurile cu două sau mai multe persoane, într-un cadru descris de un ansamblu de reguli precise care stabilesc posibilitățile de acțiune ale fiecărui jucător, precum şi modul cum li se acordă acestora, în final, anumite valori. Teoria jocurilor reprezintă un model abstract de luare a deciziilor; nu trebuie confundat cu o explicație de luarea a unei decizii în realitatea socială. Punctul comun al tuturor jocurilor imaginat în cadrul teoriilor este ideea de strategie. Teoria jocurilor reprezintă o abordare

interdisciplinară a studiului comportamentului uman. Cele mai implicate discipline, în teoria jocurilor, sunt matematica și economia, dar și alte științe sociale și comportamentale.
Prin *joc* se înțelege o situație care implică doi sau mai mulți decidenți, numiți *jucători* care sunt puși în fața situației de a-și alege o strategie pentru a-și maximiza recompensele primite ca urmare a propriilor acțiuni raportate la mutările celorlalți.

În aceste jocuri jucătorii au interese opuse, în totalitate sau parțial, acest aspect cauzând un anumit comportament și o anumită strategie în abordarea jocului. Strategiile sau combinațiile de strategii ale jucătorilor sunt recompensate cu un anumit câștig. La finalul jocului are loc o comparare a rezultatelor și o corelare a acestora cu strategiile efectuate. Strategia este modul de acțiune ales de fiecare jucător (individuală) sau de toți jucătorii (strategia jocului).

Jocurile cu o singură persoană sunt, de asemenea, cunoscute sub numele de jocuri împotriva naturii. Fără adversari, jucătorul trebuie doar să listeze opțiunile disponibile și apoi să aleagă rezultatul optim. Atunci când este implicată întâmplarea, jocul ar putea părea mai complicat, dar, în principiu, decizia este încă relativ simplă. De exemplu, o persoană care decide dacă va purta o umbrelă cântărește costurile și beneficiile purtării sau nu a acesteia. Deși această persoană poate lua o decizie greșită, nu există un adversar conștient. Adică, natura se presupune că este complet indiferentă la decizia jucătorului, iar persoana își poate baza decizia pe probabilități simple. Jocurile cu o singură persoană nu prea interesează teoreticienii jocurilor.

Exemplu:

Fie N cartonașe așezate în linie dreaptă pe o masă și doi jucători care mută alternativ. Fiecare cartonaș are o față colorată în roșu, iar cealaltă în albastru. O mutare constă în alegerea unui cartonaș cu fața roșie în sus și întoarcerea lui. In plus, dacă dorește, cel care e la mutare poate să își aleagă orice alt cartonaș (indiferent de culoarea feței care este în sus) care se află la stânga celui ales inițial și să îl întoarcă. Știind culorile fețelor care sunt inițial în sus, să se precizeze care jucător câștigă.

Acest joc este cunoscut în literatura de specialitate ca *Turning Turtles,* echivalint cu jocul NIM. Putem asocia unui cartonaș roșu situat pe poziția ***i*** o grămadă cu ***i*** pietre. Se pot observa următoarele:

- Starea finală din problemă este cea în care nu mai exista niciun cartonaș cu fața roșie în sus. Deasemenea, în jocul NIM, se ajunge în starea finală când toate grămezile de pietre sunt vide.
- Daca un jucător întoarce un singur cartonaș roșu situat pe poziția ***i***, mutarea lui este echivalentă cu a lua toate pietrele din grămada ce conține **i** pietre.
- Daca un jucător întoarce cartonașul roșu de pe poziția ***i***, iar apoi mai întoarce un alt cartonaș de pe poziția j ($1 \leq j < i$), avem următoarele posibilități:
- Cartonașul de pe poziția ***j*** este albastru: după ce se efectuează mutarea, vom avea pe poziția j un cartonaș roșu, iar pe poziția ***i*** un cartonaș albastru. Această mutare este echivalentă cu a lua exact ***i - j*** pietre din grămada ce conține ***i*** pietre, obținând o grămadă cu ***j*** pietre.
- Cartonașul de pe poziția ***j*** este roșu: după ce se efectuează mutarea, vom aveam pe pozițiile ***i*** și ***j*** cartonase albastre, înainte acestea fiind roșii. Această mutare este echivalenta cu a lua toate pietrele din grămezile ce conțineau ***i***, respectiv ***j*** pietre. Însă în jocul NIM, a lua toate pietrele din grămezile ce conțin ***i***, respectiv ***j*** pietre este echivalent cu a lua ***i - j*** pietre din grămada cu ***i*** pietre, deoarece suma-xor a numerelor de pietre din grămezi nu se schimbă.

Folosindu-ne de aceste observații, putem concluziona ca primul jucător va câștiga atunci și numai atunci când suma-xor a pozițiilor unde se află cartonașele cu fața roșie în sus este diferita de 0.

Combinatorica este ramura matematicii care se ocupa cu studiul mulțimilor (de obicei finite) de obiecte și modalitățile de a le "combina". Aceasta este înrudită cu alte domenii ale matematicii, in special cu algebra, geometria și teoria probabilităților, având aplicabilitate și în domenii precum informatica și fizica statistică. În particular, sunt studiate probleme de numărare (combinatorică enumerativă), de generare și de analiză (design combinatoric și teoria matroizilor), de determinare a "celui mai mare", "celui mai mic" sau a "celui mai bun" obiect al mulțimii (combinatorică extremală și optimizare combinatorică), sau cu determinarea structurilor algebrice ale acelor obiecte (combinatorică algebrică).

În matematică, o combinare reprezintă un mod de a alege dintre elementele unei mulțimi, așa încât (spre deosebire de permutări) ordinea alegerii nu contează, sau mai degrabă numărul total de combinații care pot fi făcute înainte ca una dintre acestea să se repete. În cazurile in care nu sunt multe elemente este posibil să numărăm toate combinările prin scrierea acestora. De exemplu, fiind date trei fructe (un măr, o portocală și o pară), există trei combinări a câte două fructe care pot fi extrase din acest set: un măr și o pară, un măr și o portocală, sau o pară și o portocală. Din punct de vedere formal, o k combinare a unei mulțimi S este o submulțime de k elemente distincte ale lui S.

$$C_n^k = \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{k}!\,(\mathbf{n}-\mathbf{k})!}$$

Dacă A este o mulțime cu n elemente (unde n∈N), atunci numărul total de SUBMULȚIMI ORDONATE ale lui A formate cu k elemente, 0≤k≤n, se numesc **aranjamente de n elemente luate câte k**.

$$A_n^k = \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{k})!}$$

Metodele combinatoricii sunt utilizate în rezolvarea problemelor de transport și de stocare a bunurilor. Legături au fost făcute între combinatorică și probleme de programare liniară, statistică, etc. Metodele combinatoricii sunt utilizate în codificarea și decodificarea informațiilor, ca și în alte probleme de teoria informațiilor.

Exemplu: La o serbare, 18 persoane și-au dat mâna. Câte strângeri de mâna au avut loc în total? avem n=18, n fiind numărul de persoane; și k=2, două persoane își dau mâna;

Cum nu există o ordine, avem:

$$C_{18}^2 = \frac{18!}{2!(18-2)!} = 153$$

La un turneu de șah au participat n șahiști, n≥ 2. Să se demonstreze că în orice moment al turneului dinaintea ultimei runde cel puțin doi șahiști au același număr de victorii.

Soluție: În orice moment al turneului dinaintea ultimei runde, fiecare șahist a jucat maximum n-2 partide și a putut obține 0,1,2,...,n-2 victorii, deci în total n-1 posibilități (cutii). Fiindcă la turneu au participat n șahiști rezultă că cel puțin doi șahiști au aceloși număr de victorii înaintea ultimei runde.

Două mărimi variabile sunt direct proporționale, dacă depind una de cealaltă, astfel încât dacă una crește de un număr de ori, atunci și cealaltă crește de același număr de ori. Între două mulțimi finite de numere se stabilește o proporționalitate directă, dacă și numai dacă se poate forma un șir de raporturi egale, astfel încât mulțimea numărătorilor raporturilor să fie una din mulțimi, iar mulțimea numitorilor raporturilor să fie cealaltă mulțime. Mulțimea ordonată ($a_1, a_2,..., a_n$) este direct proporțională cu mulțimea ordonată ($b_1, b_2,..., b_n$) dacă $\frac{a1}{b1} = \frac{a2}{b2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. Valoarea comună a acestor raporturi se numește coeficient de proporționalitate și se notează cu k.

Exemplu 1 - proporționalitate directă

3 kilograme de mere costă 18 lei. Cât costă 8 kilograme de mere de aceeași calitate?

3 kg mere ……………….. 18 lei
8 kg mere ……………….. x lei

$\frac{3}{8} = \frac{18}{x}$, $x = \frac{8 \cdot 18}{3} = 48\ lei$

Mărimi invers proporționale Două mărimi variabile sunt *invers proporționale* dacă depind una de cealaltă astfel încât dacă una crește de un număr de ori atunci cealaltă descrește de același număr de ori.

Între două mulțimi finite de numere se stabilește o proporționalitate inversă dacă și numai dacă se poate forma un șir de produse egale astfel încât primul factor al fiecărui produs să fie element al unei mulțimi, iar cel de al doilea factor să fie element al celeilalte mulțimi.

Mulțimea ordonată ($a_1, a_2,..., a_n$) este invers proporțională cu mulțimea ($b_1, b_2,..., b_n$) dacă

$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \ldots = a_n \cdot b_n$

Exemplu 2 - proporționalitate inversă

Patru muncitori execută o lucrare in 6 zile. În câte zile ar termina lucrarea trei muncitori, lucrând în același ritm?

4 muncitori ……………….. 6 zile
3 muncitori ……………….. x zile
$4 \cdot 6 = 3 \cdot x$
$x = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8\ zile$

Probleme de mișcare

$d = v \cdot t$
d = distanța parcursă
v = viteza de deplasare
t = timpul

Exemplu:

Pe un fluviu, un vapor parcurge o anumită distanță în 4 ore, în sensul curgerii apei. Mergând împotriva curentului apei, același drum ar ține 4 ore și 20 de minute. În cât timp ar parcurge aceeași distanță o plută care se deplasează cu viteza apei?

Notăm viteza proprie a vaporului cu v, iar viteza apei cu v_a.

Exprimăm drumul parcurs, care este același, și egalăm expresiile astfel obținute:

$4 \cdot (v + v_a) = 13/3 \cdot (v - v_a)$.

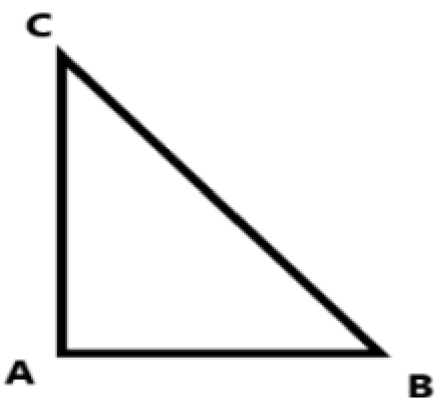
De aici se obține $v = 25\ v_a$, iar asta înseamnă că timpul necesar pentru ca pluta să parcurgă distanța este de 104 ore.

Vom face acum cunoștință cu ideea de model și modelare

Cum, fără echer, putem verifica dacă colțul unei odăi este unghi drept?

Rezolvare:

Model matematic: Pentru a verifica dacă colțul este drept, presupunem că colțul are forma unui triunghi și trebuie să determinăm tipul acestuia. Măsurăm din colț, perpendicular pe muchie, pe un perete 60 cm, fixăm un punct.



Pe alt perete, în același mod, din același punct măsurăm 80 cm. Măsurăm distanța dintre punctele fixate.

Rezolvarea modelului matematic

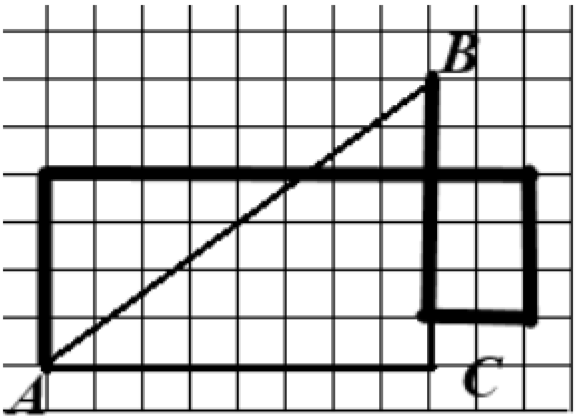
Se dă: Presupunem că Δ ABC-triunghi ABC este dreptunghic.

AB=60 cm , AC=80 cm. Conform teoremei lui Pitagora are loc relația: $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Interpretare rezultatului Dacă distanța dintre punctele fixate este diferită de 100 cm, atunci presupunerea că Δ ABC este dreptunghic este falsă, deci m($\sphericalangle A$) este diferită de 90^0. altfel m($\sphericalangle A$) = 90^0

2. Un automobil pleacă din punctul A și merge: 4 km spre nord, 10 km spre est, 3 km spre sud, 2 km spre vest, 5 km spre nord, oprindu-se în punctul B. Aflați distanța dintre punctele A și B.

Rezolvare:

Model matematic: Interpretăm datele problemei prin desen.



Considerăm 1 km – o unitate.

Observăm că distanța dintre punctele A și B este ipotenuza triunghiului dreptunghic ABC, cu catetele de 8 și 6 unități.

Rezolvarea modelului matematic:

Se dă: ABC - triunghi dreptunghic

Conform teoremei lui Pitagora are loc relația: $AB^2 = BC^2 + AC^2$, $AB^2 = 6^2 + 8^2$=36 + 64=100, deci AB = 10

Interpretare rezultatului

Distanța dintre punctele A și B este de 10 unități, adică de 10 km.

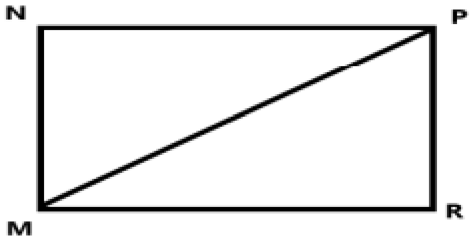
Verificarea rezultatului Răspuns: 10 km.

3. Pe o stradă circulă un TIR a cărui cabină are lungimea de 2 m şi remorca de 10 m. Ar putea acest TIR să facă viraj la stânga sau dreapta, dacă străzile au lăţimile 10 m şi 6 m?

Rezolvare:

Model matematic: Intersecția străzilor reprezintă un dreptunghi.

Ca TIR-ul să poată vira la dreapta sau la stânga lungimea lui nu trebuie să depășească lungimea diagonalei dreptunghiului.



Rezolvarea modelului matematic:

Se dă: MNPR - dreptunghi MN = 6 m MR = 10 m, MP - diagonala dreptunghiului

Conform teoremei lui Pitagora are loc relația: $MP^2 = MN^2 + MR^2$

$MP^2 = 6^2 + 10^2 = 36 + 100 = 136$

$MP = \sqrt{136}$

Lungimea TIR-ului în întregime este: 2 m+10 m = 12 m

$12^2 = 144 > 136$

Deci TIR-ul este mai lung ca diagonal intersecției.

Verificarea rezultatului Răspuns: Nu v-a putea vira.

O funcție este o relație intre 2 mulțimi care asociază fiecărui element din domeniul de definiție un element si numai unu din codomeniu.

Fie două mulțimi nevide A și B. Dacă printr-un procedeu facem ca **fiecărui element din mulțimea A să îi corespundă un singur element din mulțimea B**, spunem că **am definit o funcție** de la A la B și notăm: f: $A \to B$

Mulțimea A se numește domeniul de definiție, iar B este domeniul de valori, **y=f(x)** se numește LEGEA DE CORESPONDENȚĂ

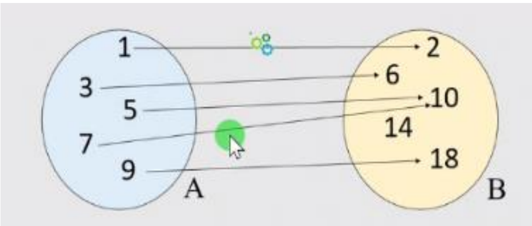
Dacă x∈A, elementul f(x)∈B se numește imaginea lui x prin funcția f sau VALOAREA funcției f în punctul x.

Exemplu: Fie f:{-1,0,1}→{1,2,3}, f(x)=x+2. Precizați domeniul de definiție, codomeniul și calculați valoarea funcției în punctul x=0.

Domeiul de definiție este mulțimea {-1,0,1}, codomeniul este mulțimea {1,2,3} iar valoarea funcției în punctul x=0 este: f(0)=0+2=2.

Funcțiile pot fi descrise în diverse moduri:

a) printr-o **DIAGRAMĂ**



b) printr-un **TABEL**

EXEMPLU: f:{-2,-1,0,1,2}→{5,6,7,8,9}

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
f(x)	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

c) printr-o **FORMULĂ**

EXEMPLU: f:{0,1,2}→R, **f(x)=-2x+3**

Dacă mulțimea A are ***n*** elemente, iar mulțimea B are ***m*** elemente, ne întrebăm câte funcții diferite putem avea definite pe A cu valori în B.

Aceasta este o nouă problemă de numărare.

Să ne imaginăm că elementele mulțimii B sunt ***m*** cutii goale, în care vom așeza cele ***n*** elemente ale mulțimii A, în toate modurile posibile. Primul element se poate pune în oricare din cutii, deci avem ***m*** posibilități. Al doilea element are, de asemenea, ***m*** locuri posibile, deci alte ***m*** posibilități ș.a.m.d.

Astfel, numărul total al funcțiilor este, în cazul nostru, $\boldsymbol{m^n}$**.**

Fie f:A→B o funcție. **IMAGINEA FUNCȚIEI** (sau mulțimea valorilor funcției) este mulțimea **Im *f*={f(x)/x∈A}.**

OBS: Im*f* ⊆B.

EXEMPLU: Fie f:{-5,-3,0,1}→B, f(x)=-3x-1. Determinați mulțimea **Im*f*.**

f(-5)=-3·(-5)-1=+15-1=14;

f(-3)=-3·(-3)-1=+9-1=8;

f(0)=-3·0-1=0-2= -1;

f(7)=-3·1-2= -3-1=-4;

Am obținut valorile 14, 8, -1 și -4, rezultă că **Im*f*={-4,-1, 8,14}**

Fie f:A→B (A=domeniul de definiție și B=codomeniul lui f).

Mulțimea Gf={(x;f(x)) /x∈A} se numește GRAFICUL FUNCȚIEI f.

Orice punct M (având coordonate o abscisă=a și o ordonată=b) aparține graficului funcției f dacă f(abscisă)=ordonata, adică f(a)=b:

M(a, b) ∈ G_f ⟺ ***f(a)=b***

Proprietatea de mai sus este valabilă pentru orice tip de funcție, așadar și pentru *funcția liniară f:R→R, f(x)=ax+b*.

EXEMPLU***: Se consideră funcția f:R→R, f(x)=-3x+6. Verificați dacă:***

a) A(4,7) ∈Gf;   b) B(2,0) ∈Gf.

a)Pentru a verifica dacă A(4,7)∈G_f trebuie să calculăm f(4). Dacă rezultatul este 7 atunci punctul A aparține lui G_f. Așadar f(4)=-3·4+6=-12+6=-6 ⟹A(4,7)∉Gf.

b) Pentru a verifica dacă B(2,0)∈Gf trebuie să calculăm f(2). Dacă rezultatul este 0 atunci punctul B aparține lui G_f. Așadar f(2)=-3·2+6=-6+6=0⟹ B(2,0)∈G_f.

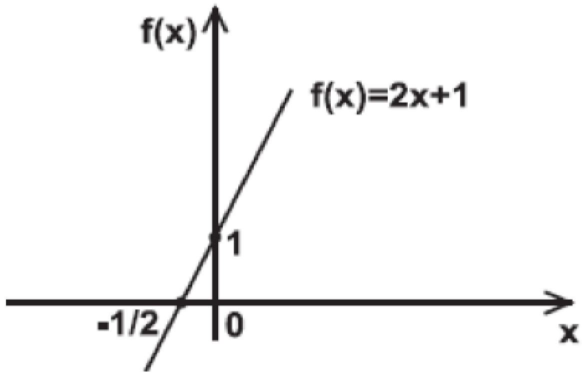
De cele mai multe ori, cel puțin în matematică, corespondența se face între mulțimi de numere. Dacă aceste mulțimi sunt tocmai mulțimea ℝ a numerelor reale, ***f:R→R, f(x)=ax+b,*** atunci funcția se mai poate pune în evidență și printr-un grafic, care este o dreaptă.

Pentru a trasa graficul unei funcții liniare este suficient să se determine două puncte ale graficului funcției respective, să se reprezinte în sistemul de axe ortogonale și se trasează dreapta ce trece prin punctele respective.

Graficul unei funcții liniare de forma ***f:R→R, f(x)=ax+b*, intersectează axa Ox în punctul A($\frac{-b}{a}$; 0) și axa Oy în punctul B(0, b)**

Exemplu:

f:ℝ→ℝ , f(x) = 2x + 1.



Lumea în care trăim este plină de relații și corespondențe. Multe dintre acestea au fost recunoscute de oameni și folosite în încercarea lor de a înțelege și modela realitatea.

Exemplu:

Corespondența între individ și codul lui numeric personal.

APLICAȚII:

1. Să se determine numărul submulțimilor cu 2 elemente ale mulțimii A={1,2,3,4,5,6}.
2. Construiește o schemă logică pentru rezolvarea următoarei probleme:
   a) ne-am rătăcit în orașul Paris, dar avem hartă și cunoaștem limba franceză. Vrem să găsim Turnul Eiffel.
   b) a rezolvării unei ecuații simple, de tipul ax+b = c
3. În câte moduri se pot așeza 8 femei și 8 bărbați pe 16 fotolii, în rând, astfel încât să nu existe 2 bărbați și 2 femei alături?
4. Descompuneți în factori primi numerele: 12, 25, 24, 36 și 120.
5. Descompuneți numerele 12, 25, 24, 36 și 120 în sumă, în câteva moduri alese după preferință.
6. Rezolvați ecuațiile:
   a) $5x + 10y = 120$.
   b) $2x + 4{,}5 = x + 10$
   c) $5(3x – 1) = 13x + 7$
   d) $3x^2 = 27$

ID 135712

e) $4x^2 = 32$

7. La o lucrare avem alocată suma totală de 2400 lei. Această sumă trebuie împărțită în mod proporțional, în funcție de volumul de muncă efectuată, între trei muncitori. Primul a lucrat 6 părți din lucrare, al doilea muncitor 4 părți, iar cel de-al treilea doar 2 părți. Cât i se cuvine fiecărui muncitor?
8. Un păianjen are câte un ciorap și un pantof pe fiecare cele 8 picioare ale sale. În câte moduri diferite se poate încălța păianjenul, știind că pe fiecare picior ciorapul trebuie pus înaintea pantofului?
9. Regele Arthur și cavalerii săi se așează pe cele 12 scaune din jurul Mesei Rotunde. În câte moduri se poate face așezarea lor?
10. Arătați că în orice mulțime format din 5 numere naturale există două a căror diferență este divizibil cu 4.
11. Considerăm un număr natural căruia îi schimbăm în mod arbitrar ordinea cifrelor. Este posibil ca diferența dintre numărul inițial și cel final să fie 2003?
12. Mama a observat că din dulap au dispărut cinci tablete de ciocolată . Ele puteau fi luate de cei trei copii: A, B, C. Fiind trași la răspundere, ei au dat mai întâi urm toarele răspunsuri: A: N-am luat nici o ciocolată ! B: N-am luat nici o ciocolată ! C: N-am luat nici o ciocolată ! Dup un nou "interogatoriu" copiii au făcut următoarele declarații:

    A: B a luat mai multe tablete decât C!

    B: (către A): Minți!

    C: Toate au fost luate de A și B!

    A (către C): Minți!

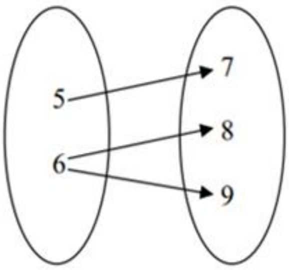
    Aflați câte tablete de ciocolată au fost luate de către fiecare copil, știind că fiecare a făcut atâtea declarații false câte tablete de ciocolată a luat.
13. Suma a 2 numere este 100. Al doilea este de 3 ori mai mare decât primul. Aflați numerele.
14. O firmă oferă o cămașă pentru 6 dolari și are 12 dolari de transport maritim, în timp ce o altă firmă oferă o cămașă pentru 7,5 dolari și are 9 dolari de transport maritim.

    Ce cămașă are cel mai bun preț?

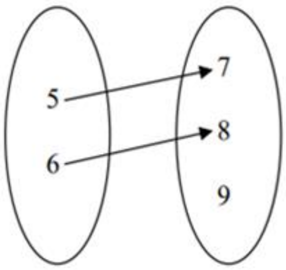
    Câte cămăși ar trebui să cumpărați pentru ca prețul să fie același pentru ambele firme?

15. Un caiet și două penare costă împreună 8 lei, iar două caiete și un penar costă împreună 7 lei. Cât costă fiecare?
16. Diana, în drum spre prietena ei aflată în vacanță în Tenerife, are de parcurs un traseu în 4 zile. Ea merge în prima zi 30% din traseu și încă 8km, a doua zi 20% din rest și încă 12 km și a treia zi 3 5 din noul rest și încă 6 km. Știind că în a patra zi mai are de parcurs distanța de 130 km, să se afle lungimea traseului.
17. Precizați care din următoarele diagrame reprezintă o funcție:

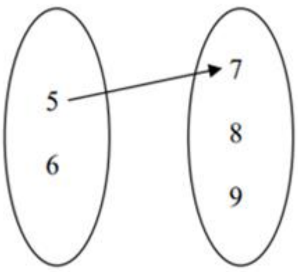
a.



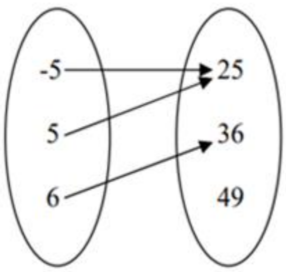
b.



c.



d.



18. Descrieți printr-o diagramă, apoi printr-un tabel, funcția următoare:

    $f:\{0,1,2\}\rightarrow\{0,2,3,4\}$, $f(x)=x+2$
19. Se consideră funcția $\boldsymbol{f : A\rightarrow B}$, definită prin tabelul următor:

x	-1	0	1	3
f(x)	2	1	0	-2

Completați spațiul punctat cu valoarea funcției *f* în punctul precizat:

f(-1) =........ ; *f*(3)=........ ; *f*(0)=........ ; *f*(1)= ……..

20. Prețul unui pix este de 4 lei. Completați tabelul:

Cantitate	2	5	6	10	25

(bucăți)					
Preț total			24 lei		

a) Stabiliți o formulă pentru corespondența realizată între elementele din tabel;

b) Realizați o diagramă corespunzătoare valorilor din tabel;

c) Definiți o funcție cu formula de la subpunctul a.), stabilind domeniul și codomeniul acesteia, conform tabelului.

21. Completați tabelul următor, știind că fiecărei laturi a unui pătrat îi corespunde mărimea perimetrului acestuia (toate dimensiunile sunt măsurate în centimetri):

Lungimea laturii	5 cm	8 cm	10 cm	12 cm	24 cm	45 cm
perimetru			40 cm			

a) Realizați o diagramă corespunzătoare valorilor din tabel;

b) Stabiliți formula pentru corespondența din tabel și scrieți funcția asociată acestei corespondențe, stabilind domeniul și codomeniul funcției, conform tabelului.

22. a) Câte funcții de tipul f: $A \to B$ avem dacă ambele mulțimi au, de exemplu, 5 elemente?

b) Câte funcții există în cazul general, când mulțimea A are 4 elemente, iar B are 3 elemente?

23. Fie funcția f(x)=x-2. f: {0,1,2,3,4,5,6,}→ N

a) Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei, Imf.

b) Reprezentaţi funcţia prin diagrame.

c) Calculaţi f(1)+f(5):3

24) a) Verificati dacă perechea (2 , 4) aparţine mulţimii Gf a funcţiei f:{1,2 , 3 , 4 , 5}→N , f(x)=x+2.

b) Verificaţi dacă perechea (-1 , 0) aparţine mulţimii Gf a funcţiei f:{-1, 0, 1, 2 }→N , f(x)=-2x.

25) Reprezentaţi geometric graficul următoarelor funcţii:

a) f: $\{2; -1; 0; 1; 2; 3\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 2$;

b) f:$\{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4$.

c) $f:R \to R$, $f(x) = -x+2$